2024年度10月期入学 / 2025年度4月期入学
京都大学 大学院情報学研究科
修士課程 知能情報学コース / データ科学コース 入学者選抜試験問題
(情報学基礎)

2024年8月6日 9:00～11:00

【注意】

1. 問題冊子はこの表紙を含めて11枚ある。
2. 試験開始の合図があるまで中を見てはいけない。
3. 試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷の不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
4. 問題は日本語と英語の両方で出題されている。**すべて解答しなさい。**
   F1-1, F1-2　　線形代数、微分積分 ……………………… 1-4ページ
   F2-1, F2-2　　アルゴリズムとデータ構造 ……………… 5-10ページ
5. 特に指定のない限り、日本語または英語で解答すること。
6. 解答用紙に記載されている注意事項についても留意すること。

October 2024 Admissions / April 2025 Admissions
Entrance Examination for Master's Program
Intelligence Science and Technology Course / Data Science Course
Graduate School of Informatics, Kyoto University
(Fundamentals of Informatics)

August 6, 2024
9:00 - 11:00

NOTES

1. This is the Question Booklet in 11 pages including this front cover.
2. Do not open the booklet until you are instructed to start.
3. After the examination has started, check the number of pages and notify proctors (professors) immediately if you find missing pages or unclear printings.
4. Questions are written in Japanese and English. **Answer all the questions.**
   F1-1, F1-2　　Linear Algebra, Calculus …………………… Pages 1 to 4
   F2-1, F2-2　　Algorithms and Data Structures ………… Pages 5 to 10
5. Write your answer in Japanese or English, unless otherwise specified.
6. Read carefully the notes on the Answer Sheets as well.

F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

以下の設問において $\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表す。ベクトル $\mathbf{a}$ に対して $\mathbf{a}^\top$ は $\mathbf{a}$ の転置を表し、行列 $\mathbf{A}$ に対して $\mathbf{A}^{-1}$ は $\mathbf{A}$ の逆行列を表す。$\mathbf{0}$ は零ベクトルを表す。また、$\mathbf{I}_n$ は n 行 n 列の単位行列を表す。

設問1　$\mathbf{0}$ でない列ベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ に対して、行列 $\mathbf{T}$ を

$$\mathbf{T} = \mathbf{I}_n - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^\top}{\mathbf{v}^\top\mathbf{v}}$$

と定義する。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $\mathbf{T}$ が対称行列であることを示せ。

(2) $\mathbf{T}$ が直交行列であることを示せ。

(3) $\mathbf{T}$ の固有値を全て求めよ。

(4) $\mathbf{T}$ の行列式の値を求めよ。

(5) 列ベクトル $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^n$ を

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

と定義する。$\mathbf{e}_1$ の定数倍でない列ベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ が与えられたとき、$\mathbf{T}\mathbf{x}$ が $\mathbf{e}_1$ の定数倍となるように $\mathbf{v}$ を定め、$\mathbf{x}$ と $\mathbf{e}_1$ を用いて表せ。

設問2　以下の問いに答えよ。

(1) $\mathbf{P}$ を n 行 n 列の任意の実行列とし、$\mathbf{I}_n + \mathbf{P}$ が正則であるとする。このとき、次の等式が成り立つことを示せ。

$$(\mathbf{I}_n + \mathbf{P})^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{I}_n + \mathbf{P})^{-1}$$

(2) $\mathbf{Q}$ を n 行 m 列の実行列、$\mathbf{R}$ を m 行 n 列の実行列とし、$\mathbf{I}_n + \mathbf{Q}\mathbf{R}$ が正則であるとする。このとき、$\mathbf{I}_m + \mathbf{R}\mathbf{Q}$ が正則であること、および次の等式が成り立つことを示せ。

$$(\mathbf{I}_n + \mathbf{Q}\mathbf{R})^{-1}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{I}_m + \mathbf{R}\mathbf{Q})^{-1}$$

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

In the questions below, $\mathbb{R}$ denotes the set of all real numbers, $\mathbf{a}^\top$ stands for the transpose of a vector $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}^{-1}$ is the inverse of a matrix $\mathbf{A}$, and $\mathbf{I}_n$ denotes the identity matrix of size $n \times n$.

Q.1 Let $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ be a nonzero column vector, and define a matrix $\mathbf{T}$ as

$$\mathbf{T} = \mathbf{I}_n - 2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^\top}{\mathbf{v}^\top\mathbf{v}}.$$

Answer the following questions.

(1) Show that $\mathbf{T}$ is a symmetric matrix.

(2) Show that $\mathbf{T}$ is an orthogonal matrix.

(3) Compute all the eigenvalues of $\mathbf{T}$.

(4) Compute the determinant of $\mathbf{T}$.

(5) Define a column vector $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^n$ as

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Given a column vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, which is not $\mathbf{e}_1$ multiplied by any scalar. Determine $\mathbf{v}$ so that $\mathbf{T}\mathbf{x}$ becomes $\mathbf{e}_1$ multiplied by some scalar, and express it using $\mathbf{x}$ and $\mathbf{e}_1$.

Q.2 Answer the following questions.

(1) Let $\mathbf{P}$ be an arbitrary real matrix of size $n \times n$. Assume that $\mathbf{I}_n + \mathbf{P}$ is non-singular. Show that the following equation holds.

$$(\mathbf{I}_n + \mathbf{P})^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{I}_n + \mathbf{P})^{-1}$$

(2) Let $\mathbf{Q}$ and $\mathbf{R}$ be arbitrary real matrices of size $n \times m$ and $m \times n$, respectively. Assume that $\mathbf{I}_n + \mathbf{Q}\mathbf{R}$ is non-singular. Show that $\mathbf{I}_m + \mathbf{R}\mathbf{Q}$ is non-singular and that the following equation holds.

$$(\mathbf{I}_n + \mathbf{Q}\mathbf{R})^{-1}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{I}_m + \mathbf{R}\mathbf{Q})^{-1}$$

F1–1、F1–2、F2–1、F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

以下の設問において、$\log x$ は x の自然対数、e はネイピア数（自然対数の底）を表す。

設問 1　以下の問いに答えよ。計算過程も明示すること。

(1) n を正の整数とする。$f(x) = x^2 e^{-x}$ の n 階導関数を求めよ。

(2) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \log(\tan x)^{\cos x}$$

設問 2　球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ と円柱 $x^2 + y^2 \leq 9, -\infty < z < \infty$ の共通部分の体積を求めよ。計算過程も明示すること。

設問 3　以下の問いに答えよ。

(1) 任意の正の整数 n について、不等式

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{2(n+1)!}$$

が成立することを示せ。

(2) (1) の不等式を用いて e が無理数であることを示せ。

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

In the questions below, $\log x$ denotes the natural logarithm of x, and e denotes Napier's constant (the base of the natural logarithm).

Q.1 Answer the following questions. Derivations must be clearly shown.

(1) Let n be a positive integer. Compute the n-th derivative of $f(x) = x^2 e^{-x}$.

(2) Compute the following limit.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2} - 0} \log(\tan x)^{\cos x}$$

Q.2 Compute the volume common to a sphere $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$ and a cylinder $x^2 + y^2 \leq 9$, $-\infty < z < \infty$. Derivation must be clearly shown.

Q.3 Answer the following questions.

(1) Show that the inequality

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{3}{2(n+1)!}$$

holds for any positive integer n.

(2) Show that e is an irrational number using the inequality in (1).

F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 1　長さ 12 の数列 $S = (3, -1, 2, -4, 5, -1, 3, -3, 4, -2, 1, -2)$ において、S の i 番目の要素の値を $s(i)$ で表し、例えば $s(1) = 3$ である。
$\mathrm{maxSum}(i, j) = \max_{i \le a \le b \le j} \Sigma_{k=a}^{b} s(k)$ とし、$M = \mathrm{maxSum}(1, 12)$ とする。

(1) $\mathrm{maxSum}(1, 4)$ の値を求めよ。

(2) M と、$\Sigma_{k=a}^{b} s(k) = M$ となる (a, b) の値をすべて導出せよ。

(3) $\Sigma_{k=a}^{b} s(k) = M - 1$ となる (a, b) の値をすべて導出せよ。

設問 2　乱数を用いて無向グラフを生成する以下の擬似コードで記載されるアルゴリズムを考える。

> **let** $G_1(V_1, E_1)$ be an undirected graph with $V_1 = \{v_0, v_1\}$ and $E_1 = \{\{v_0, v_1\}\}$;
> **for** $i = 2$ to n **do**
> **begin**
> 　**let** v_i be a new vertex;
> 　**let** v_j and v_k be distinct vertices randomly selected from V_{i-1};
> 　**let** $G_i(V_i, E_i)$ be an undirected graph with $V_i = V_{i-1} \cup \{v_i\}$ and
> 　　　$E_i = E_{i-1} \cup \{\{v_i, v_j\}, \{v_i, v_k\}\}$;
> **end**

なお、どの異なる頂点対 (v_j, v_k) についても、その選択確率は正であるものとする。このアルゴリズムにより生成されるグラフ $G_n(V_n, E_n)$ は連結であり、$n+1$ 個の頂点を持ち、かつ、自己閉路および多重辺を含まないのは明らかである。以下では、G_n で $G_n(V_n, E_n)$ を表すものとする。

グラフ G_n における頂点 $v_p \in V_n$ の次数（v_p に接続する辺の個数）を $\mathrm{deg}_{G_n}(v_p)$ とし、V_n 中の異なる 2 頂点 v_p, v_q 間を結ぶ最短経路（辺数が最小の経路）の長さ（辺数）を $\mathrm{dist}_{G_n}(v_p, v_q)$ とする。$\mathrm{deg}_{G_n}(v_p)$ および $\mathrm{dist}_{G_n}(v_p, v_q)$ は、アルゴリズム中でランダムに選択された頂点に依存して決まる正整数である。

以下では、n を 4 以上の偶数とし、このアルゴリズムにより生成されうるすべての G_n からなる無向グラフの集合を $\mathcal{G}_n$ とする。すると例えば、どの n に対しても、
$\min_{G_n \in \mathcal{G}_n}\{\ \min_{v_p \in V_n}\{\mathrm{deg}_{G_n}(v_p)\}\ \}$ も $\max_{G_n \in \mathcal{G}_n}\{\ \min_{v_p \in V_n}\{\mathrm{deg}_{G_n}(v_p)\}\ \}$ も 2 となる。
その理由は、常に $\mathrm{deg}_{G_n}(v_n) = 2$ となり、かつ、 どの頂点 $v_p \in V_n$ についても常に $\mathrm{deg}_{G_n}(v_p) \ge 2$ となるからである。

以下のそれぞれの値を導出せよ。なお、それぞれの値は n を含む式となる場合もある。

(1) $\max_{G_n \in \mathcal{G}_n}\{\ \max_{v_p \in V_n}\{\mathrm{deg}_{G_n}(v_p)\}\ \}$

(2) $\min_{G_n \in \mathcal{G}_n}\{\ \max_{p<q, v_p \in V_n, v_q \in V_n}\{\mathrm{dist}_{G_n}(v_p, v_q)\}\ \}$

(3) $\max_{G_n \in \mathcal{G}_n}\{\ \max_{p<q, v_p \in V_n, v_q \in V_n}\{\mathrm{dist}_{G_n}(v_p, v_q)\}\ \}$

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.1 Let $S = (3, -1, 2, -4, 5, -1, 3, -3, 4, -2, 1, -2)$ be a number sequence of length 12 and $s(i)$ is the value of the i-th element of S. For example, $s(1) = 3$ holds. Let us define $\mathrm{maxSum}(i, j) = \max_{i \le a \le b \le j} \Sigma_{k=a}^{b} s(k)$ and $M = \mathrm{maxSum}(1, 12)$.

(1) Derive the value of $\mathrm{maxSum}(1, 4)$.

(2) Derive M and all the values of (a, b) that satisfy $\Sigma_{k=a}^{b} s(k) = M$.

(3) Derive all the values of (a, b) that satisfy $\Sigma_{k=a}^{b} s(k) = M - 1$.

Q.2 Consider an algorithm for generating an undirected graph using random numbers, whose pseudocode is given below.

> **let** $G_1(V_1, E_1)$ be an undirected graph with $V_1 = \{v_0, v_1\}$ and $E_1 = \{\{v_0, v_1\}\}$;
> **for** $i = 2$ to n **do**
> **begin**
>   **let** v_i be a new vertex;
>   **let** v_j and v_k be distinct vertices randomly selected from V_{i-1};
>   **let** $G_i(V_i, E_i)$ be an undirected graph with $V_i = V_{i-1} \cup \{v_i\}$ and
> $E_i = E_{i-1} \cup \{\{v_i, v_j\}, \{v_i, v_k\}\}$;
> **end**

Note that for any pair of distinct vertices (v_j, v_k), the selection probability is positive. Obviously, any graph $G_n(V_n, E_n)$ constructed by this algorithm is connected, has $n + 1$ vertices, and does not contain a self-loop or a multi-edge. In the following, we use G_n to denote $G_n(V_n, E_n)$.

For a graph G_n, $\deg_{G_n}(v_p)$ denotes the degree of a vertex $v_p \in V_n$ (i.e., the number of edges connecting to v_p), and $\mathrm{dist}_{G_n}(v_p, v_q)$ denotes the length (i.e., the number of edges) of the shortest path (i.e., the path consisting of the minimum number of edges) between two distinct vertices v_p and v_q in V_n. Note that $\deg_{G_n}(v_p)$ and $\mathrm{dist}_{G_n}(v_p, v_q)$ are positive integers depending on randomly selected vertices in the algorithm.

In the following, n is an even number greater than or equal to 4. Let $\mathcal{G}_n$ be the set of all possible undirected graphs G_n generated by this algorithm. For example, for any n, $\min_{G_n \in \mathcal{G}_n}\{\ \min_{v_p \in V_n}\{\deg_{G_n}(v_p)\}\ \} = 2$ and $\max_{G_n \in \mathcal{G}_n}\{\ \min_{v_p \in V_n}\{\deg_{G_n}(v_p)\}\ \} = 2$ hold because $\deg_{G_n}(v_n) = 2$ always holds and $\deg_{G_n}(v_p) \ge 2$ always holds for any vertex $v_p \in V_n$.

Derive the following values. Note that the values may be given as mathematical expressions of n.

(1) $\max_{G_n \in \mathcal{G}_n}\{\ \max_{v_p \in V_n}\{\deg_{G_n}(v_p)\}\ \}$

(2) $\min_{G_n \in \mathcal{G}_n}\{\ \max_{p<q, v_p \in V_n, v_q \in V_n}\{\mathrm{dist}_{G_n}(v_p, v_q)\}\ \}$

(3) $\max_{G_n \in \mathcal{G}_n}\{\ \max_{p<q, v_p \in V_n, v_q \in V_n}\{\mathrm{dist}_{G_n}(v_p, v_q)\}\ \}$

F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 1　以下の問いに答えよ。

(1) 数列 $(8, 3, 4, 12, 10, 6, 9, 14, 1)$ の各要素をキーとして先頭から順に挿入した際にできる二分探索木を、図 1 のように図示せよ。一度挿入したキーは動かさないものとする。

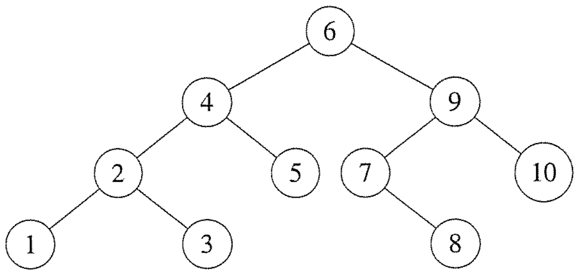

図 1: 二分探索木

(2) 図 1 の二分探索木からキー 6 を削除した二分探索木を図示せよ。

(3) (2) でできた二分探索木に再びキー 6 を挿入した時にできる二分探索木を図示せよ。

(4) 互いに異なる n 個の要素からなる数列が与えられたとき、これを格納する二分探索木を構成し、この木の節点を巡回する再帰関数により、数列の要素を昇順ソートすることを考える。この再帰関数を `traverse_tree(x)` とし、`x` をある節点とする。この時、`traverse_tree(x)` 内で、`x` が `NIL` でない限り呼び出される、以下の 3 つの関数呼び出しの正しい順序を答えよ。ただし、`x.left` は `x` の左の子節点、`x.right` は `x` の右の子節点とし、それぞれ存在しないときは `NIL` とする。

1. `traverse_tree(x.right)`
2. `traverse_tree(x.left)`
3. `print(x)`

(5) 互いに異なる n 個の要素からなる数列に対する (4) のソーティングアルゴリズムの最良実行時間計算量と最悪実行時間計算量を答えよ。

（次のページに続く）

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.1 Answer the following questions.

(1) Depict the binary search tree, in the same way as that shown in Fig. 1, constructed by inserting the keys prepared in a number list $(8, 3, 4, 12, 10, 6, 9, 14, 1)$ one by one from the first element. Note that once a key is inserted, it is not moved.

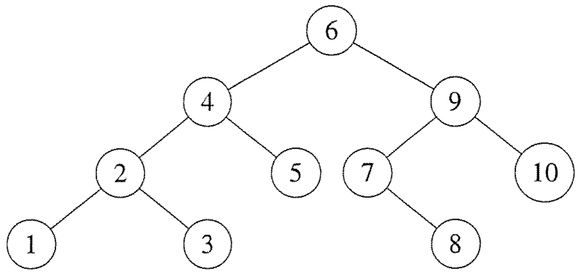

Fig. 1: Binary Search Tree

(2) Depict the binary search tree after deleting key 6 from the binary search tree shown in Fig. 1.

(3) Depict the binary search tree after re-inserting key 6 to the binary search tree made in (2).

(4) Given a list of n different numbers, consider sorting the numbers in ascending order by first constructing a binary search tree from the list and then using a recursive function that traverses the nodes of it. Let us refer to this recursive function as `traverse_tree(x)` and a node of the tree as `x`. Answer the correct order of the calls to the following three functions inside `traverse_tree(x)` when `x` is not `NIL`. Note that `x.left` is the left child node and `x.right` is the right child node of `x`, and each of them becomes `NIL` when it does not exist.

1. `traverse_tree(x.right)`
2. `traverse_tree(x.left)`
3. `print(x)`

(5) Answer the best-case time complexity order and worst-case time complexity order of the sorting algorithm in (4) for a list of n different numbers.

(continued on the next page)

設問 2　N 種類の品物 $1, 2, \ldots, N$ があり、それぞれの品物の重量は c_i（$i = 1, 2, \ldots, N$）であるとする。なお、c_i は正の整数であり、$c_1 = 1$ とする。また、それぞれの種類の品物は十分に多くあるとする。以下の問いに答えよ。なお、解答する式は定数時間で評価できるものでなければならない。

(1) $I[i, j]$ は、1 から i までの種類の品物をそれぞれ最大 1 つまで用いて、それらの合計重量をある非負の整数 j にできるかどうかを表すとする。可能であれば $I[i, j] = 1$、そうでなければ $I[i, j] = 0$ とする。このとき $I[i, j]$ を、$I[i, j]$ 以外の $I[i', j']$（ただし $i' \leq i, j' \leq j$）のうちのいくつかを用いて表せ。なお、境界条件は気にしなくてよい（つまり、$i \geq 2, j \geq \max\{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$ のみを考えてよいとする）。

(2) $S[i, j]$ は、1 から i までの種類の品物を好きなだけ用いて、合計重量をある非負の整数 j とするのに必要な品物の最小の個数とする。このとき $S[i, j]$ を、$S[i, j]$ 以外の $S[i', j']$（ただし $i' \leq i, j' \leq j$）のうちのいくつかを用いて表せ。なお、(1) と同様に、境界条件は気にしなくてよい。

(3) $P[i, j]$ は、1 から i までの種類の品物を好きなだけ用いて、合計重量をある非負の整数 j とする方法の数とする。このとき $P[i, j]$ を、$P[i, j]$ 以外の $P[i', j']$（ただし $i' \leq i, j' \leq j$）を用いて表せ。なお、同種の品物は区別しない。また、(1) と同様に、境界条件は気にしなくてよい。

Q.2 Assume that there are N types of items, $1, 2, \ldots, N$, and that the weight of each item is c_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$. Note that c_i is a positive integer and $c_1 = 1$. Also assume that there are a sufficient number of items of each type. Answer the following questions. Note that the solutions must be given as equations that can be evaluated in constant time.

(1) $I[i, j]$ denotes whether it is possible to make the total weight equal to a given non-negative integer j, using at most one item of each type from 1 to i. If possible, $I[i, j] = 1$, otherwise, $I[i, j] = 0$. Express $I[i, j]$ using some $I[i', j']$ (for $i' \leq i, j' \leq j$) other than $I[i, j]$. You do not need to care about boundary conditions (i.e., you only need to consider the cases where $i \geq 2, j \geq \max\{c_1, c_2, \ldots, c_N\}$).

(2) $S[i, j]$ denotes the minimum number of items required to make the total weight equal to a given non-negative integer j, using as many items of each type from 1 to i as needed. Express $S[i, j]$ using some $S[i', j']$ (for $i' \leq i, j' \leq j$) other than $S[i, j]$. As in (1), you do not need to care about boundary conditions.

(3) $P[i, j]$ denotes the number of ways to make the total weight equal to a given nonnegative integer j, using as many items of each type from 1 to i as needed. Express $P[i, j]$ using some $P[i', j']$ (for $i' \leq i, j' \leq j$) other than $P[i, j]$. Note that there is no distinction between items of the same type. As in (1), you do not need to care about boundary conditions.