2022年度10月期入学 / 2023年度4月期入学
京都大学 大学院情報学研究科
修士課程 知能情報学専攻 入学者選抜試験問題
(情報学基礎)

2022年8月5日 9:00～11:00

【注意】

1. 問題冊子はこの表紙を含めて11枚ある。
2. 試験開始の合図があるまで中を見てはいけない。
3. 試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷の不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
4. 問題は日本語と英語の両方で出題されている。すべて解答しなさい。
   - F1-1, F1-2　線形代数、微分積分 ……………………… 1-4ページ
   - F2-1, F2-2　アルゴリズムとデータ構造 ……………… 5-10ページ
5. 特に指定のない限り、日本語または英語で解答すること。
6. 解答用紙に記載されている注意事項についても留意すること。

October 2022 Admissions / April 2023 Admissions
Entrance Examination for Master's Program
Department of Intelligence Science and Technology
Graduate School of Informatics, Kyoto University
(Fundamentals of Informatics)

August 5, 2022
9:00 - 11:00

NOTES

1. This is the Question Booklet in 11 pages including this front cover.
2. Do not open the booklet until you are instructed to start.
3. After the examination has started, check the number of pages and notify proctors (professors) immediately if you find missing pages or unclear printings.
4. Questions are written in Japanese and English. **Answer all the questions.**
   - F1-1, F1-2　Linear Algebra, Calculus ………………… Pages 1 to 4
   - F2-1, F2-2　Algorithms and Data Structures ………… Pages 5 to 10
5. Write your answer in Japanese or English, unless otherwise specified.
6. Read carefully the notes on the Answer Sheets as well.

F1–1、F1–2、F2–1、F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 1　以下の行列 A に対して、$A = LU$ を満たす下三角行列 L と上三角行列 U を求めよ。ただし L の対角成分はすべて 1 とする。

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -2 & 7 & -9 \\ 42 & 59 & 7 & -53 & 56 \\ 30 & 37 & -8 & -35 & 30 \\ -42 & -47 & 30 & 35 & -33 \\ 12 & 18 & 20 & -64 & 43 \end{pmatrix}$$

設問 2　四元数の実 4 次正方行列表現における基底元は以下のように定義される。

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

以下の問いに答えよ。次の等式を用いてもよい。

$$IJ = K,\ JK = I,\ KI = J,\ JI = -K,\ KJ = -I,\ IK = -J,\ I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -E$$

(1) $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ とし、$Q = aE + bI + cJ + dK, \overline{Q} = aE - bI - cJ - dK$ として $Q\overline{Q}$ を求めよ。

(2) I^{-1} と Q^{-1} を求めよ。ただし $(a, b, c, d) \neq \mathbf{0}$ とする。

(3) 実 4 次正方行列の集合 M は非可換環である。この部分集合 $H = \{Q \mid \forall(a, b, c, d)\}$ も非可換環であるための以下の必要条件を証明せよ。

(a) H は加法に対して閉じている。

(b) 加法交換則が成り立つ。

(c) 加法結合則が成り立つ。

(d) 加法に対する零元が存在する。

(e) 加法に対する逆元が存在する。

(f) H は乗法に対して閉じている。

(g) 乗法結合則が成り立つ。

(h) 乗法分配則が成り立つ。

(i) 乗法は非可換である。

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.1 Calculate the matrices L and U satisfying $A = LU$ for matrix A below, where L is a lower triangular matrix with 1's on the diagonal and U is an upper triangular matrix.

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -2 & 7 & -9 \\ 42 & 59 & 7 & -53 & 56 \\ 30 & 37 & -8 & -35 & 30 \\ -42 & -47 & 30 & 35 & -33 \\ 12 & 18 & 20 & -64 & 43 \end{pmatrix}$$

Q.2 We define the basis elements of a real 4-dimentional matrix representation of quaternions as follows:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Answer the following questions. You may use the following equations:

$IJ = K,\ JK = I,\ KI = J,\ JI = -K,\ KJ = -I,\ IK = -J,\ I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -E.$

(1) Let $Q = aE + bI + cJ + dK$ and $\overline{Q} = aE - bI - cJ - dK$, where $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Calculate $Q\overline{Q}$.

(2) Calculate I^{-1} and Q^{-1}, where $(a, b, c, d) \neq \mathbf{0}$.

(3) The set of real 4-dimentional matrices M is a noncommutative ring. Prove the following necessary conditions for a subset $H = \{Q \mid \forall(a, b, c, d)\}$ to also be a noncommutative ring.

(a) H is closed for the addition.

(b) The addition is commutative.

(c) The addition is associative.

(d) There exists a zero element for the addition.

(e) There exists an inverse element for the addition.

(f) H is closed for the multiplication.

(g) The multiplication is associative.

(h) The multiplication is distributive.

(i) The multiplication is noncommutative.

F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 1　以下の関数の x に関する n 階導関数を求めよ。ただし a は実数、かつ $a > 0$、$a \neq 1$ である。

(1)　$\log_{\mathrm{e}} x$

(2)　a^x

(3)　$x^2 \mathrm{e}^x$

(4)　$\frac{1}{x^2-1}$

設問 2　$z = f(x,y), x = \mathrm{e}^u \cos v, y = \mathrm{e}^u \sin v$ とする。
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ を $x, y, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ で表せ。

設問 3　以下の積分を求めよ。計算過程を明示すること。

(1)　$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$

(2)　$\displaystyle\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} (ax^2 + by^2)\mathrm{e}^{-(ax^2+by^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$　但し、$a > 0$ かつ $b > 0$ とし、(1) の結果を用いてよい。

Master's Program	Fundamentals of Informatics	[Linear Algebra, Calculus]	Question Number	F1–2

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.1 Find the n-th derivative of the following functions with respect to x, where a is a real number and $a > 0$ and $a \neq 1$.

(1) $\log_{\mathrm{e}} x$

(2) a^x

(3) $x^2 \mathrm{e}^x$

(4) $\frac{1}{x^2-1}$

Q.2 Let $z = f(x, y), x = \mathrm{e}^u \cos v$, and $y = \mathrm{e}^u \sin v$.
Express $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ in terms of $x, y, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, and $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

Q.3 Solve the following integrals. Derivations must be clearly shown.

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x\,.$

(2) $\displaystyle\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (ax^2 + by^2)\mathrm{e}^{-(ax^2+by^2)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\,,$ where $a > 0$ and $b > 0$. You may use the result of (1).

F1–1、F1–2、F2–1、F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 1 自然数 n の関数 $f(n)$ に対するビッグオー記法 $f(n) = O(g(n))$ を考える。ここで、$g(n)$ は自然数 n の関数である。以下に示す各 $f(n)$ について、最も簡潔な形を持つ $g(n)$ を答えよ。
(1) $f(n) = 5\log n + 2(\log n)^3 + 3n^3$
(2) $f(n) = n\log n + 10n^2 + 100n$
(3) $f(n) = 4n! + 2n^n + 8n\log n$

設問 2 スタックマシンを用いて計算式 $((5-3)*2)+((7-4)/(2+1))$ の値を求めることを考える。ここで、“+” は加算、“−” は減算、“*” は乗算、“/” は除算を表す。このとき、以下の問いに答えよ。
(1) 上記の計算式に対応する構文木を図示せよ。
(2) 上記の計算式に対応する逆ポーランド記法（後置記法）を示せ。
(3) 構文木を走査することで逆ポーランド記法を出力する擬似コードを示せ。ただし、再帰呼び出しを用いること。
(4) 上記の計算式の値を得るまでのスタックの変化を図示せよ。

設問 3 互いに異なる n 個の正の整数の集合 $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ と非負の整数 s を考える。正の整数 $i\ (\leq n)$ および非負の整数 $j\ (\leq s)$ について、$d(i,j)$ は、$A_i = \{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$ の部分集合 A'_i であって、$\sum_{a\in A'_i} a = j$ を満たすものの数を表すものとする。
(1) $A = \{10, 3, 6, 13, 11, 4\}$ とする。$d(4,16)$ と $d(6,20)$、また、それぞれに対して等式を満たす部分集合をすべて求めよ。
(2) $d(i,j)$ を、$\{d(i-1,k)\}_{0\leq k\leq j}$ のうちのいくつかを用いて表せ。ただし、便宜上 $d(0,0)=1, d(0,1)=0, d(0,2)=0, \ldots, d(0,j)=0$ とする。

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.1 Consider the big O notation $f(n) = O(g(n))$ for a function $f(n)$ of a natural number n, where $g(n)$ is another function of n. Answer $g(n)$ having the simplest expression for each $f(n)$ defined below.

(1) $f(n) = 5\log n + 2(\log n)^3 + 3n^3$

(2) $f(n) = n\log n + 10n^2 + 100n$

(3) $f(n) = 4n! + 2n^n + 8n\log n$

Q.2 Suppose the value of a mathematical expression $((5-3)*2)+((7-4)/(2+1))$ is computed using a stack machine, where "+", "−", "∗", and "/" represent addition, subtraction, multiplication, and division, respectively. Answer the following questions.

(1) Draw the syntactic tree corresponding to the mathematical expression.

(2) Show the reverse Polish notation (postfix notation) corresponding to the mathematical expression.

(3) Show a pseudocode that outputs the reverse Polish notation by traversing the syntactic tree. Recursion must be used.

(4) Draw the change of the stack until the value of the mathematical expression is obtained.

Q.3 Consider a set $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ of n distinct positive integers and a non-negative integer s. For a positive integer i ($\leq n$) and a non-negative integer j ($\leq s$), let $d(i,j)$ denote the number of subsets A'_i of $A_i = \{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$ satisfying $\sum_{a \in A'_i} a = j$.

(1) Let $A = \{10, 3, 6, 13, 11, 4\}$. Compute $d(4, 16)$ and $d(6, 20)$, and for each of them, find all the subsets satisfying the equality.

(2) Express $d(i,j)$ using some elements of $\{d(i-1,k)\}_{0 \leq k \leq j}$. Let $d(0,0) = 1$, $d(0,1) = 0$, $d(0,2) = 0, \ldots, d(0,j) = 0$ for convenience.

F1–1、F1–2、F2–1、F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 $G = (V, E)$ を有向グラフとする。ここで、V は G の頂点集合、E は G の辺集合である。頂点 u から頂点 v への有向辺は順序対 $(u, v) \in E$ で表され、距離 $l(u, v) > 0$ を持つ。頂点は 1 から N で番号付けられており、$V = \{1, \ldots, N\}$ である。有向グラフの例を図 1 に示す。各辺に付された数値はその辺の距離を表す。

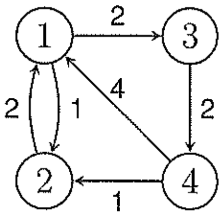

図 1

頂点 v_1 から頂点 v_m へと有向辺をたどって到達できるとき、この経路 p を $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ で表す。v_1, v_m を除く p の頂点を中間頂点とよぶ。経路 p の距離は $l(p) = \sum_{i=1}^{m-1} l(v_i, v_{i+1})$ で与えられる。頂点 u から頂点 v への最短経路は、頂点 u から頂点 v へのすべての経路のうち距離が最小のものである。

(1) 図 1 のグラフにおける頂点 4 から頂点 3 への最短経路とその距離を求めよ。

(2) 経路 $p = (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m)$ は、$v_i = v_j$ $(1 \leq i < j \leq m)$ のとき、閉路を含むという。任意の最短経路が閉路を含まないことを証明せよ。

（次のページに続く）

F1–1、F1–2、F2–1、F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

G のすべての頂点対に対して最短経路の距離を求める問題を考える。具体的には、頂点番号を利用した動的計画法に基づくアルゴリズムを作る。すべての中間頂点が $\{1, 2, \ldots, k\}$ に含まれるという制約下での頂点 i から頂点 j への最短経路の距離を $\delta(i,j,k)$ とする $(0 \le k \le N)$。条件を満たす経路が存在しないとき、$\delta(i,j,k) = \infty$ とする。また、$\delta(i,i,k) = 0$ とする。$k = 0$ のときは、中間頂点は存在しないとする。
$\delta(i,j,k)$ を使うと、元の問題はすべての i, j について $\delta(i,j,N)$ を求めることとみなせる。

(3) $1 \le k \le N$ のとき $\delta(i,j,k) = \min(\delta(i,j,k-1), \delta(i,k,k-1) + \delta(k,j,k-1))$ が成り立つことを示せ。

(4) $d^{(k)}$ はサイズ $N \times N$ の 2 次元配列であり、その要素の値は $d^{(k)}[i][j] = \delta(i,j,k)$ であるとする。ただし、配列は 1 で始まるインデックス方式とする。図 1 のグラフに対して、$d^{(0)}, \ldots, d^{(4)}$ をこの順番で求めることで、すべての頂点対に対して最短経路の距離を求めよ。

(5) (4) はこのアルゴリズムが $N+1$ 個の 2 次元配列を必要とすることを示唆するが、実際には 1 個の 2 次元配列を用意すればすむことを示せ。

(6) (5) の結果を用いると次のアルゴリズムを導ける。下の空欄 (a) および (b) を埋めよ。

Algorithm 1 すべての頂点対に対して最短経路の距離を求める

```
N × N の配列 d を値 ∞ で初期化
for i ∈ V do
    d[i][i] ← 0
end for
for (i, j) ∈ E do
    d[i][j] ← l(i, j)
end for
for k ∈ {1, ..., N} do
    for i ∈ {1, ..., N} do
        for j ∈ {1, ..., N} do
            if [    (a)    ] then
                [    (b)    ]
            end if
        end for
    end for
end for
return d
```

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q. Let $G = (V, E)$ be a directed graph. V is the vertex set of G and E is the edge set of G. A directed edge from vertex u to vertex v is represented as an ordered pair $(u, v) \in E$ and has a distance $l(u, v) > 0$. The vertices are numbered through 1 to N, and thus $V = \{1, \ldots, N\}$. An example of a directed graph is shown in Figure 1. The number attached to each edge represents the distance of the edge.

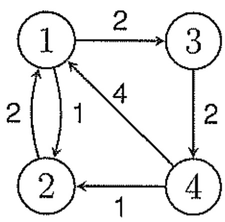

Figure 1

If vertex v_m is reachable from vertex v_1 by traversing directed edges, the corresponding path p is represented as $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$. The vertices of p except v_1 and v_m are called intermediate vertices. The distance of path p is given as $l(p) = \sum_{i=1}^{m-1} l(v_i, v_{i+1})$. The shortest path from vertex u to vertex v is the one with the smallest distance among all paths from vertex u to vertex v.

(1) Compute the shortest path, and its distance, from vertex 4 to vertex 3 of the graph in Figure 1.

(2) Path $p = (v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_m)$ is said to contain a cycle if $v_i = v_j$ $(1 \leq i < j \leq m)$. Prove that no shortest path contains a cycle.

(continued on the next page)

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

We consider the problem of computing the distance of the shortest path between every pair of vertices of G. Specifically, we will devise a dynamic programming-based algorithm that exploits vertex numbers. Let $\delta(i, j, k)$ be the distance of the shortest path from vertex i to vertex j under the constraint that all intermediate vertices are contained in $\{1, 2, \ldots, k\}$ $(0 \leq k \leq N)$. If no path satisfies the condition, $\delta(i, j, k) = \infty$. Also, we set $\delta(i, i, k) = 0$. When $k = 0$, there is no intermediate vertex. With $\delta(i, j, k)$, the original problem is recast as computing $\delta(i, j, N)$ for all i and j.

(3) Show that the following equation holds for $1 \leq k \leq N$:
$\delta(i, j, k) = \min(\delta(i, j, k-1), \delta(i, k, k-1) + \delta(k, j, k-1))$.

(4) Let $d^{(k)}$ be a two-dimensional array with size $N \times N$, with its item values being $d^{(k)}[i][j] = \delta(i, j, k)$. Note that array indexing starts with 1. For the graph in Figure 1, compute the distance of the shortest path between every pair of vertices by computing $d^{(0)}, \ldots, d^{(4)}$ in this order.

(5) (4) suggests that this algorithm requires $N + 1$ two-dimensional arrays. Show that only one array is needed in practice.

(6) Based on the result of (5), we can devise the following algorithm. Fill the blanks (a) and (b) below.

Algorithm 1 Computing the distance of the shortest path between every pair of the vertices.

```
Initialize the N × N array d with the value ∞
for i ∈ V do
    d[i][i] ← 0
end for
for (i, j) ∈ E do
    d[i][j] ← l(i, j)
end for
for k ∈ {1, ..., N} do
    for i ∈ {1, ..., N} do
        for j ∈ {1, ..., N} do
            if [        (a)        ] then
                [        (b)        ]
            end if
        end for
    end for
end for
return d
```