2021年度10月期入学 / 2022年度4月期入学
京都大学 大学院情報学研究科
修士課程 知能情報学専攻 入学者選抜試験問題
(専門科目)

2021年7月31日 12:00～14:00

【注意】

1. 問題冊子はこの表紙を含めて13枚ある。
2. 試験開始の合図があるまで中を見てはいけない。
3. 試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷の不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
4. 問題は下記6題であり、日本語と英語の両方で出題されている。このうちいずれか**2題を選択**し、解答しなさい。

5. 特に指定のない限り、日本語または英語で解答すること。
6. 解答用紙に記載されている注意事項についても留意すること。

The Japanese version of this document is the prevailing and authoritative version; the English translation below is provided for reference only

October 2021 Admissions / April 2022 Admissions
Entrance Examination for Master's Program
Department of Intelligence Science and Technology
Graduate School of Informatics, Kyoto University
(Specialized Subjects)

July 31, 2021
12:00 - 14:00

NOTES

1. This is the Question Booklet in 13 pages including this front cover.
2. Do not open the booklet until you are instructed to start.
3. After the examination has started, check the number of pages and notify proctors (professors) immediately if you find missing pages or unclear printings.
4. There are 6 questions, written in Japanese and English. The questions are classified as listed below. **Choose and answer 2 questions.**

5. Write your answer in Japanese or English, unless otherwise specified.
6. Read carefully the notes on the Answer Sheets as well.

設問 1 以下の認知心理学・認知神経科学における用語や概念について簡潔に説明せよ。図を用いてもよい。

(1) 紡錘状回顔領域 (fusiform face area)

(2) 数量認知におけるサビタイジング (subitizing in numerosity cognition)

(3) 自己受容感覚 (proprioception)

(4) 基本情動説 (basic emotions approach)

(5) 盲点における視知覚 (visual perception at the blind spot)

設問 2 脳活動計測における「侵襲性」について、脳波 (electroencephalography, EEG) と単一細胞記録 (single-cell recording) という計測手法を例に挙げて説明せよ。

設問 3 変化の見落とし (change blindness) について検討するために、次のような実験を行う。実験中、半数の試行では、図 1(a) のように、いくつかのオブジェクトを並べた画像と、そのうち 1 つのオブジェクトを鏡映反転させた画像を、空白画面をはさんで交互に繰り返し呈示する（画像呈示時間 250 ms、空白画面呈示時間 250 ms）。残り半数の試行では同一の画像が空白画面をはさんで繰り返し呈示される。実験参加者には鏡映反転したオブジェクト（変化オブジェクトと呼ぶ）を見つけたらボタンを押すように指示する。画像内の全体のオブジェクトの数を 1, 5, 9 個と変えて、最初の画像が呈示されてからボタン押しまでの時間（反応時間）を測定する。各試行は、実験参加者がボタンを押すか、一定時間が経過すると終了する。実験の結果、図 1(b) のように、変化オブジェクトが存在する試行において、全体のオブジェクトの数が増えると変化オブジェクトを見つけるまでの平均反応時間が長くなった。

(1) 変化の見落としはどのような現象であるかを説明せよ。また、この実験結果に基づき、変化の見落としの認知メカニズムについて考察せよ。

(2) 空白画面の呈示時間を 0 ms にして 2 枚の画像を交互に繰り返し呈示した場合、どのような結果になると考えられるか。理由もあわせて説明せよ。

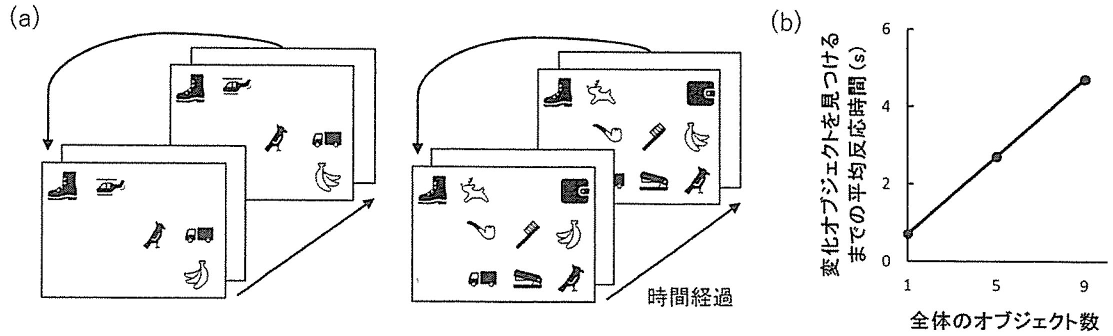

図 1 (a) 画像内の全体のオブジェクト数が 5 個、9 個の場合の変化の見落としの実験画像例。(b) オブジェクト数ごとの変化オブジェクトを見つけるまでの平均反応時間。

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Q.1 Give a brief explanation on each of the following items/concepts in cognitive psychology and cognitive neuroscience. Figures may be used.

(1) Fusiform face area

(2) Subitizing in numerosity cognition

(3) Proprioception

(4) Basic emotions approach

(5) Visual perception at the blind spot

Q.2 Explain "invasiveness" in brain activity measurement, using electroencephalography (EEG) and single-cell recording methods as examples.

Q.3 For investigating change blindness, the following experimental task is designed. As shown in Figure 1(a), in the half of the experimental trials, an image including some objects and a modified image, where one of the objects is mirror-reversed, are presented alternately and repeatedly (each image presentation: 250 ms), with a blank display (250 ms) inserted between the images. The remaining half of the experimental trials, one image is presented repeatedly with a blank display inserted between the images. Participants are asked to press a button when they detect a mirror-reversed object (named a changed object). The number of objects in an image is manipulated (1, 5, and 9 objects), and the response time (the time from the start of the image presentation to the button-press) is measured. The trials finish when participants press the button or when a certain amount of time has passed. The results are shown in Figure 1(b). The mean response time to detect the changed object increases as a function of the number of objects.

(1) Explain what change blindness is. In addition, speculate what the possible cognitive process underlying change blindness is, based on the results.

(2) What results do you expect, if the duration of a blank display between the images is 0 ms? Explain the expected results and the reason.

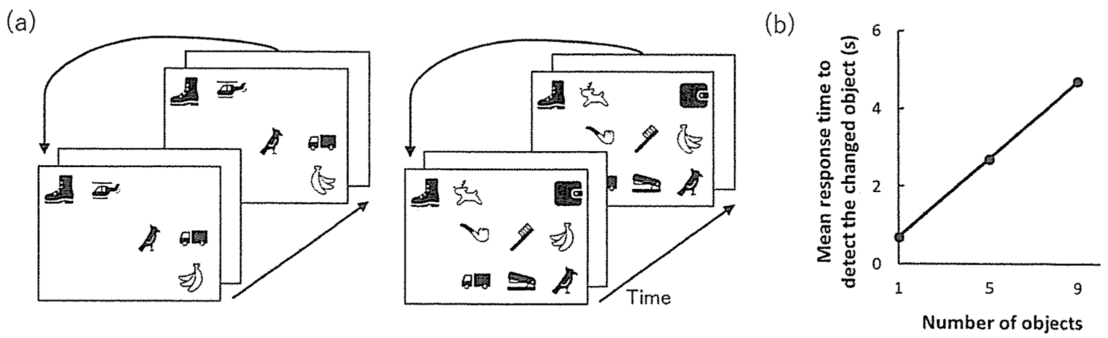

Figure 1. (a) Example of images used in a change blindness experiment (5 and 9 objects). (b) Mean response time to detect the changed object as a function of the number of objects.

設問 1　$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が互いに独立に正規分布 $\mathrm{N}\left(\mu,\, 4^2\right)$ に従う時、帰無仮説 $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$、対立仮説 $\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$、有意水準 $\alpha = 0.05$ の片側検定を考える。確率変数 X が標準正規分布に従う時、確率 $\mathrm{Pr}\,[X \leq 1.645] = 0.95$ であることを用いてよい。
(1) $\mu - \mu_0 = 1.2, n = 16$ のときの検出力を考える。検出力は、確率変数 Z が標準正規分布に従う時、確率 $\mathrm{Pr}\,[Z \geq \mathrm{u}]$ として表わすことができる。そのときの u の値を求めよ。
(2) $\mu - \mu_0 = 1.2$ のとき検出力を 95% 以上にする n の最小値を答えよ。

設問 2　製造法 A と B があり、製造法 A では製品の不良率は p である。
(1) $p = 0.5$ のとき製造法 A で 8 個製造した。不良品が 1 個以下になる確率を求めよ。
(2) $p = 1/4000$ のとき製造法 A で 10,000 個製造した。不良品が発生しない確率を求めよ。また、ポアソン分布 $\mathrm{Pr}\,[X = r] = \lambda^r \exp(-\lambda)/r!$ を用いた近似により得られる確率を求めよ。
(3) 製造法 B で 100 個製造したところ不良品が 60 個であった。製造法 A の不良率が $p = 0.5$ のとき、製造法 B の不良率が製造法 A と異なるかを有意水準 $\alpha = 0.05$ で両側検定せよ。確率変数 X が標準正規分布に従う時、確率 $\mathrm{Pr}\,[X \leq 1.96] = 0.975$ であることを用いてよい。

設問 3　2 つの確率変数 X と Y に関して、期待値と分散が次のようになっている。

$$\mathbb{E}\,[X] = 3.0,\ \ \mathbb{E}\,[Y] = 4.0,\ \ \mathbb{E}\,[XY] = 12.3,\ \ \mathbb{V}\,[X] = 1.0,\ \ \mathbb{V}\,[Y] = 1.0$$

(1) X と Y のそれぞれの二乗の期待値 $\mathbb{E}\left[X^2\right], \mathbb{E}\left[Y^2\right]$ と X と Y の共分散 $\mathrm{Cov}[X, Y]$ を答えよ。
(2) X と Y にそれぞれ次の一次変換を施して新しい確率変数 U と V を作った。

$$U = 5X - 3,\ V = -3Y + 2$$

U と V の共分散 $\mathrm{Cov}\,[U, V]$ と相関係数 $\mathrm{r}\,[U, V]$ を答えよ。

Q.1 Let $x_1, x_2, \ldots, x_n$ be independent observations from a normal distribution $\mathrm{N}\left(\mu,\ 4^2\right)$. Consider a one-tailed test performed with significant level $\alpha = 0.05$, under the null hypothesis $\mathrm{H}_0 : \mu = \mu_0$, and the alternative hypothesis $\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$. Note that $\Pr[X \leq 1.645] = 0.95$ when X follows the standard normal distribution.

(1) Consider the statistical power for $\mu - \mu_0 = 1.2$ and $n = 16$. The power can be calculated from the probability $\Pr[Z \geq \mathrm{u}]$, where the random variable Z follows the standard normal distribution. Answer the value of u.

(2) Assuming $\mu - \mu_0 = 1.2$, answer the minimum value of n that makes the power larger than 95%.

Q.2 Consider two manufacturing methods A and B. The defect rate of the method A is p.

(1) If $p = 0.5$, answer the probability of having no greater than one defective unit, when eight units are manufactured with A.

(2) If $p = 1/4000$, answer the probability of having no defective unit, when 10,000 units are manufactured with A. In addition, give the probability by the approximation using the Poisson distribution $\Pr[X = r] = \lambda^r \exp(-\lambda)/r!$.

(3) Suppose that the method B produces 60 defective units out of 100 units. Perform a two-tailed test to examine whether the defective rate of method B is the same as the defect rate of method A when $p = 0.5$. Note that $\Pr[X \leq 1.96] = 0.975$ when X follows the standard normal distribution.

Q.3 The expectations and variances of random variables X and Y are given as follows.

$$\mathbb{E}[X] = 3.0,\quad \mathbb{E}[Y] = 4.0,\quad \mathbb{E}[XY] = 12.3,\quad \mathbb{V}[X] = 1.0,\quad \mathbb{V}[Y] = 1.0$$

(1) Answer the expectations $\mathbb{E}[X^2]$ and $\mathbb{E}[Y^2]$ and the covariance $\mathrm{Cov}[X, Y]$.

(2) New random variables U and V are created by linear transformation on X and Y as follows.

$$U = 5X - 3,\ V = -3Y + 2$$

Answer the covariance $\mathrm{Cov}[U, V]$ and the correlation coefficient $\mathrm{r}[U, V]$.

2次元実数空間におけるデータ点(x,y)が、確率密度関数$f(x,y)$をもつ確率分布に従うとする。この確率分布は、クラス A と B に対応する 2 つの確率分布の混合分布であり、それぞれが以下の確率密度関数をもつ：

$$f_{\mathrm{A}}(x,y)=\frac{1}{\pi}\exp\left(-\frac{x^2}{a}-ay^2\right),\quad f_{\mathrm{B}}(x,y)=\frac{1}{\pi}\exp(-(x-2)^2-(y-3)^2).$$

また、クラス A, B の事前確率（混合重み） $p_{\mathrm{A}},p_{\mathrm{B}}$ は、それぞれ

$$p_{\mathrm{A}}=\frac{1}{1+\exp(b)},\qquad p_{\mathrm{B}}=1-p_{\mathrm{A}}$$

とする。なお、aは正の実数定数、bは実数定数とする。

設問 1 クラス A に属することが予め分かっている 3 つのデータ点$(1,1),(2,2),(0,1)$が与えられたときの、aの最尤推定値を求めよ。

設問 2 $a=1$とする。あるデータ点(x,y)がクラス A と B のいずれに属するかを、クラスの事後確率の大小を比較することで判定する。データ点(x,y)がクラス A に属すると判定する条件を与えよ。

設問 3 データ点$(1,1)$がクラス A に属する事後確率が、クラス A の事前確率と一致するときのaの値を求めよ。

設問 4 $a=0.5$とする。2 つのデータ点 $(0,0),(1,2)$ が観測されたときの、bの最尤推定値を与えよ。なお、$\exp(-10)\approx 0$としてよい。

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

A data point (x, y) in a two-dimensional real space is generated by a probability distribution with a probability density function $f(x, y)$. Here, the probability distribution is a mixture of two distributions corresponding to class A and class B that respectively have the following probability density functions:

$$f_{\mathrm{A}}(x, y) = \frac{1}{\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{a} - ay^2\right), \quad f_{\mathrm{B}}(x, y) = \frac{1}{\pi} \exp(-(x-2)^2 - (y-3)^2).$$

In addition, the prior probabilities (i.e., the mixture weights) of class A and class B are respectively given as

$$p_{\mathrm{A}} = \frac{1}{1 + \exp(b)}, \qquad p_{\mathrm{B}} = 1 - p_A .$$

Note that a is a positive real constant, and that b is a real constant.

Q.1 Answer the maximum likelihood estimate of a, when three data points, $(1,1)$, $(2,2)$, and $(0,1)$, that are known to belong to class A, are given.

Q.2 Assume that $a = 1$. We determine whether a data point (x, y) belongs to class A or class B by comparing the posterior class probabilities. Answer the conditions for determining that the data point (x, y) belongs to class A.

Q.3 Find the value of a when the posterior probability that data point $(1,1)$ belongs to class A is equal to the prior probability of class A.

Q.4 Assume that $a = 0.5$. Answer the maximum likelihood estimate of b when the two data points, $(0,0)$ and $(1,2)$, are observed. Note that $\exp(-10) \approx 0$ may be used.

以下では, 実数 p が $0 < p \leq 1$ を満たすときに、$N(p)$ を $N(p) = \lceil -\log_2 p \rceil$ すなわち $-\log_2 p$ 以上の最小の整数、と定義する。たとえば、$N(\frac{1}{5}) = 3$、$N(\frac{1}{32}) = 5$ である。

情報源アルファベットが $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ であるような記憶のない定常情報源 S を考える。情報源 S が記号 a_i を発生させる確率を p_i と表し、

$$P_1 = 0, \qquad P_i = \sum_{k=1}^{i-1} p_k \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

と定義する。さらに、$p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n > 0$ が成立していると仮定して、a_i の記号 0 と 1 による符号化 C を

$C(a_i)$: P_i を 2 進表現したときの $N(p_i)$ 桁目までの 0 と 1 の列

と定義する。たとえば、$P_i = \frac{3}{5}$ かつ $p_i = \frac{1}{5}$ であれば、$\frac{3}{5}$ の 2 進表現が $0.100\cdots$ であり、$N(\frac{1}{5}) = 3$ であるから、$C(a_i) = 100$ である。情報源 S の情報量を $H(S)$、平均符号長を $\overline{N}$ で表す。

設問 1　記号数が $n = 4$ であり、p_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ が以下のように与えられている場合に符号 $C(a_1), C(a_2), C(a_3), C(a_4)$ を求めよ。

$$p_1 = \frac{1}{3}, \qquad p_2 = \frac{1}{4}, \qquad p_3 = \frac{1}{4}, \qquad p_4 = \frac{1}{6}$$

設問 2　次の不等式が成り立つことを符号化 C の定義を用いることによって示せ。

$$H(S) \leq \overline{N} < H(S) + 1$$

設問 3　記号数が $n = 6$ であり、$H(S) = \overline{N}$ が成立するような数列 $p_1, p_2, \ldots, p_6$ をすべて与えよ。また、与えた数列の中で p_6 が最小のものについて、符号 $C(a_1), C(a_2), \ldots, C(a_6)$ を与えよ。

設問 4　$H(S) = \overline{N}$ が成立し、かつ、$p_1 = p_2 = \cdots = p_k = p_{k+1} = \cdots = p_n$ が成立するとき、C がハフマン符号になることを、C をハフマン符号として構成する過程を与えることにより示せ。

設問 5　$H(S) = \overline{N}$ が成立し、かつ、ある k $(1 < k < n)$ について

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_k > p_{k+1} = \cdots = p_n$$

が成立するとき、C がハフマン符号になることを、C をハフマン符号として構成する過程を与えることにより示せ。

In this question, for every real number p such that $0 < p \leq 1$, $N(p) = \lceil -\log_2 p \rceil$, that is, $N(p)$ denotes the least integer more than or equal to $-\log_2 p$. For example, $N(\frac{1}{5}) = 3$, and $N(\frac{1}{32}) = 5$.

Consider a stationary memoryless source S which has a source alphabet $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. The probability that the source S produces each symbol a_i is denoted by p_i. We assume that $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_n > 0$. Let

$$P_1 = 0, \text{ and } P_i = \sum_{k=1}^{i-1} p_k \qquad (i = 2, \ldots, n).$$

For each a_i we define a code $C(a_i)$ consisting of 0 and 1 as

> $C(a_i)$: the sequenece of the binary representation of P_i rounded off to $N(p_i)$ after the decimal point.

For example, if $P_i = \frac{3}{5}$ and $p_i = \frac{1}{5}$, then $\frac{3}{5}$ is represented as $0.100\cdots$ in binary, and because $N(\frac{1}{5}) = 3$, $C(a_i) = 100$. The information of the source S is denoted by $H(S)$ and the average length of $C(a_1), C(a_2), \ldots$, and $C(a_n)$ is denoted by $\overline{N}$.

Q.1 Let $n = 4$. Show $C(a_1)$, $C(a_2)$, $C(a_3)$, and $C(a_4)$ in the case that

$$p_1 = \frac{1}{3}, \qquad p_2 = \frac{1}{4}, \qquad p_3 = \frac{1}{4}, \qquad \text{and } p_4 = \frac{1}{6}$$

Q.2 By using the definition of the code C, prove that

$$H(S) \leq \overline{N} < H(S) + 1.$$

Q.3 Let $n = 6$. List all sequences $p_1, p_2, \ldots, p_6$ satisfying $H(S) = \overline{N}$. Moreover, for the sequence such that p_6 is the minimum in all of the sequences, show the codes $C(a_1), C(a_2), \ldots, C(a_6)$.

Q.4 Assume that $H(S) = \overline{N}$ and $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$. Show that C is a Huffman code, by presenting the process of constructing C as a Huffman code.

Q.5 Assume that $H(S) = \overline{N}$ and there exists k $(1 < k < n)$ such that

$$p_1 = p_2 = \cdots = p_k > p_{k+1} = \cdots = p_n.$$

Show that C is a Huffman code, by presenting the process of constructing C as a Huffman code.

$n \in \mathbb{Z}$ を離散時間インデックスとする。また、単位インパルス信号 $\delta[n]$ および単位ステップ信号 $u[n]$ を以下の通り定義する。

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & (n \neq 0) \\ 1 & (n = 0) \end{cases}$$

$$u[n] = \begin{cases} 0 & (n < 0) \\ 1 & (n \geq 0) \end{cases}$$

設問 1　以下の離散時間信号 $x[n]$ に対する z 変換 $X(z)$ を求めよ。

(1) $x[n] = 3\delta[n] - 2\delta[n-2] + 5\delta[n-4]$

(2) $x[n] = nu[n]$

設問 2　以下の伝達関数 $H(z)$ で定義されるシステムの安定性を判定し、対応する回路を図示せよ。また、逆 z 変換 $h[n]$ を求めよ。

(1) $H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$

(2) $H(z) = \dfrac{1 + 2z^{-1}}{2 - z^{-1}}$

設問 3　以下の離散時間信号 $x[n]$ に対する離散時間フーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ。ただし、ω は正規化角周波数とする。

(1) $x[n] = 3\delta[n] - 2\delta[n-2] + 5\delta[n-4]$

(2) $x[n] = u[n] - u[n-6]$

Let $n \in \mathbb{Z}$ be a discrete-time index. The unit impulse signal $\delta[n]$ and the unit step signal $u[n]$ are defined as follows:

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & (n \neq 0), \\ 1 & (n = 0), \end{cases}$$

$$u[n] = \begin{cases} 0 & (n < 0), \\ 1 & (n \geq 0). \end{cases}$$

Q.1 Compute the z-transform $X(z)$ of a discrete-time signal $x[n]$ given below.

(1) $x[n] = 3\delta[n] - 2\delta[n-2] + 5\delta[n-4]$

(2) $x[n] = nu[n]$

Q.2 Judge the stability of a system whose transfer function $H(z)$ is given below and draw the correponding circuit. In addition, compute the inverse z-transform $h[n]$.

(1) $H(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$

(2) $H(z) = \dfrac{1 + 2z^{-1}}{2 - z^{-1}}$

Q.3 Compute the discrete-time Fourier transform $F(\omega)$ of a discrete-time signal $x[n]$ given below, where ω represents a normalized angular frequency.

(1) $x[n] = 3\delta[n] - 2\delta[n-2] + 5\delta[n-4]$

(2) $x[n] = u[n] - u[n-6]$

型なしラムダ計算では、構文 $(\lambda x.\ M)$ は x を拘束変数、M を本体とする関数を定義する。構文 $(M\ N)$ は関数 M を引数 N に適用する。適用は左結合であり、$f\ x\ y$ は $(f\ x)\ y$ である。括弧は結合順序を変えない限り省略できる。

ラムダ計算を用いて、真理値を以下のように定義する。

$\mathtt{true} \equiv \lambda x.\lambda y.\ x$

$\mathtt{false} \equiv \lambda x.\lambda y.\ y$

設問 1　$\mathtt{cond} \equiv \lambda c.\lambda x.\lambda y.\ c\ x\ y$ と定義する。式 $\mathtt{cond}\ \mathtt{true}\ x\ y$ が x に簡約されることを示せ。

設問 2　論理和 (OR) を $\mathtt{or} \equiv \lambda x.\lambda y.\ \boxed{}$ の形で実装せよ。or の実装には cond が有用だが、最終的な式は cond を含まないように簡約せよ。式は true と false の両方または一方を含んでもよい。

設問 3　or を真理値のすべての組合せに適用し、設問 2 の実装が正しいことを示せ。

次に LISP 方式のリストを以下のように構築する。

リスト $()$ :: $\mathtt{nil} \equiv \lambda x.\ \mathtt{true}$

リスト (a) :: $\lambda l.\ l\ a\ \mathtt{nil}$

リスト (a,b) :: $\lambda l.\ l\ a\ (\lambda l.\ l\ b\ \mathtt{nil})$　以下同様

あわせて以下の操作を定義する。

$\mathtt{head} \equiv \lambda l.\ l\ \mathtt{true}$

$\mathtt{tail} \equiv \lambda l.\ l\ \mathtt{false}$

$\mathtt{cons} \equiv \lambda h.\lambda t.\ (\lambda l.\ l\ h\ t)$

$\mathtt{isempty} \equiv \lambda l.\ l\ (\lambda h.\lambda t.\ \mathtt{false})$

設問 4　式 $\mathtt{isempty}\ (\mathtt{cons}\ a\ \mathtt{nil})$ が false に簡約されることを示せ。

設問 5　$\mathtt{fix} \equiv \lambda f.\ (\lambda x.\ f\ (\lambda y.\ x\ x\ y))\ (\lambda x.\ f(\lambda y.\ x\ x\ y))$ と定義する。
また、$\mathtt{rec} = \lambda f.\lambda l.\ (\mathtt{isempty}\ l)\ \mathtt{nil}\ (f\ (\mathtt{tail}\ l))$ とおく。
$\mathtt{fix}\ \mathtt{rec} = \lambda l.\ (\mathtt{isempty}\ l)\ \mathtt{nil}\ ((\mathtt{fix}\ \mathtt{rec})\ (\mathtt{tail}\ l))$ を示せ。

設問 6　リストの少なくとも 1 個の要素が真であれば true を、そうでなければ false を返す any を実装せよ。これまでに定義した式は簡約せずに用いてよい。

In the untyped lambda calculus, the syntax $(\lambda x.\ M)$ defines a function with a bound variable x and a body M. The syntax $(M\ N)$ applies a function M to an argument N. Application is left-associative, and thus $f\ x\ y$ is $(f\ x)\ y$. Parentheses can be omitted as long as the omission does not change the order of association.

Using lambda calculus, we define the truth values as follows:

$\texttt{true} \equiv \lambda x.\lambda y.\ x$

$\texttt{false} \equiv \lambda x.\lambda y.\ y$

Q.1 We define $\texttt{cond} \equiv \lambda c.\lambda x.\lambda y.\ c\ x\ y$. Show that the expression $\texttt{cond}\ \texttt{true}\ x\ y$ reduces to x.

Q.2 Implement logical disjunction (OR) in the form of $\texttt{or} \equiv \lambda x.\lambda y.\ \boxed{}$.
cond is helpful to implement or, but the expression in final form must be reduced such that it does not include cond. The expression may include true and/or false.

Q.3 Show the correctness of the implementation of Q.2 by applying or to all combinations of truth values.

Next, we construct LISP-style lists as follows:

list () :: $\texttt{nil} \equiv \lambda x.\ \texttt{true}$

list (a) :: $\lambda l.\ l\ a\ \texttt{nil}$

list (a, b) :: $\lambda l.\ l\ a\ (\lambda l.\ l\ b\ \texttt{nil})$ and the same applies to longer lists.

We also define the following operations.

$\texttt{head} \equiv \lambda l.\ l\ \texttt{true}$

$\texttt{tail} \equiv \lambda l.\ l\ \texttt{false}$

$\texttt{cons} \equiv \lambda h.\lambda t.\ (\lambda l.\ l\ h\ t)$

$\texttt{isempty} \equiv \lambda l.\ l\ (\lambda h.\lambda t.\ \texttt{false})$

Q.4 Show that the expression $\texttt{isempty}\ (\texttt{cons}\ a\ \texttt{nil})$ reduces to false.

Q.5 We define $\texttt{fix} \equiv \lambda f.\ (\lambda x.\ f\ (\lambda y.\ x\ x\ y))\ (\lambda x.\ f(\lambda y.\ x\ x\ y))$.
Also, let $\texttt{rec} = \lambda f.\lambda l.\ (\texttt{isempty}\ l)\ \texttt{nil}\ (f\ (\texttt{tail}\ l))$.
Show that $\texttt{fix}\ \texttt{rec} = \lambda l.\ (\texttt{isempty}\ l)\ \texttt{nil}\ ((\texttt{fix}\ \texttt{rec})\ (\texttt{tail}\ l))$.

Q.6 Implement any that returns true if at least one element of a list is true, and false otherwise. You may use the above-defined expressions without reductions.