2021 年度 10 月期入学 / 2022 年度 4 月期入学
京都大学 大学院情報学研究科
修士課程 知能情報学専攻 入学者選抜試験問題
(情報学基礎)

2021 年 7 月 31 日 9:00～11:00

【注意】

1. 問題冊子はこの表紙を含めて 11 枚ある。
2. 試験開始の合図があるまで中を見てはいけない。
3. 試験開始後、枚数を確認し、落丁または印刷の不鮮明なものがあれば直ちに申し出ること。
4. 問題は日本語と英語の両方で出題されている。すべて解答しなさい。
   - F1-1, F1-2　　線形代数、微分積分 ……………………… 1-4 ページ
   - F2-1, F2-2　　アルゴリズムとデータ構造 ……………… 5-10 ページ
5. 特に指定のない限り、日本語または英語で解答すること。
6. 解答用紙に記載されている注意事項についても留意すること。

The Japanese version of this document is the prevailing and authoritative version; the English translation below is provided for reference only

October 2021 Admissions / April 2022 Admissions
Entrance Examination for Master's Program
Department of Intelligence Science and Technology
Graduate School of Informatics, Kyoto University
(Fundamentals of Informatics)

July 31, 2021
9:00 - 11:00

NOTES

1. This is the Question Booklet in 11 pages including this front cover.
2. Do not open the booklet until you are instructed to start.
3. After the examination has started, check the number of pages and notify proctors (professors) immediately if you find missing pages or unclear printings.
4. Questions are written in Japanese and English. **Answer all the questions.**
   - F1-1, F1-2　　Linear Algebra, Calculus ………………… Pages 1 to 4
   - F2-1, F2-2　　Algorithms and Data Structures ………… Pages 5 to 10
5. Write your answer in Japanese or English, unless otherwise specified.
6. Read carefully the notes on the Answer Sheets as well.

修士課程　情報学基礎　【線形代数、微分積分】　問題番号 F1－1

F1–1、F1–2、F2–1、F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 1 以下で定義される実行列 A と B、および実数ベクトル $\boldsymbol{x}$ に関して、以下の問いに答えよ。ここで、$||\boldsymbol{x}||$ は $\boldsymbol{x}$ の長さを表す。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad ||\boldsymbol{x}|| > 0$$

(1) A^3 を求めよ。

(2) A^{-1} を求めよ。

(3) A^{15} を求めよ。

(4) $\lim_{n\to\infty} ||(AB)^n \boldsymbol{x}||$ を求めよ。ここで、n は自然数とする。

設問 2 $m \times n$ $(m > n)$ の実行列 A と以下で定義される行列 B と C を考える。ここで、${}^{\mathrm{T}}$ は転置を表すものとする。また、内積 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ を以下で定義する。ここで、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は l 次元ベクトル、a_k は $\boldsymbol{a}$ の k 番目の要素、b_k は $\boldsymbol{b}$ の k 番目の要素とする。

$$B = A^{\mathrm{T}}A \qquad C = AA^{\mathrm{T}} \qquad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \sum_{k=1}^{l} a_k b_k$$

以下の問いに答えよ。必要であれば、実対称行列に関する以下の性質を使用せよ。

- 実対称行列の固有値は全て実数である。
- 実対称行列のどの固有値に対しても、実ベクトルからなる固有ベクトルをとることができる。

(1) B と C がともに実対称行列であることを示せ。

(2) B の全ての固有値が非負であることを示せ。

(3) 実対称行列は直交行列で対角化できる。B を対角化する直交行列の列ベクトルはいずれも B の固有ベクトルである。これらのうち正の固有値 λ_i, λ_j に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{p_i}$, $\boldsymbol{p_j}$ とし、$\boldsymbol{q_i}$ と $\boldsymbol{q_j}$ を $\boldsymbol{q_i} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A\boldsymbol{p_i}$ と $\boldsymbol{q_j} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_j}} A\boldsymbol{p_j}$ で与えられるベクトルとする。

$\boldsymbol{q_i}, \boldsymbol{q_j}$ が C の固有ベクトルであって対応する固有値はそれぞれ λ_i, λ_j であること、および $\langle \boldsymbol{q_i}, \boldsymbol{q_j} \rangle = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$ であることを示せ。また、$\boldsymbol{p_i} = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q_i}$ であることを示せ。

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.1 Answer the following questions about real matrices A and B, and a real vector $\boldsymbol{x}$ defined as follows, where $||\boldsymbol{x}||$ denotes the length of $\boldsymbol{x}$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad ||\boldsymbol{x}|| > 0$$

(1) Calculate A^3.

(2) Calculate A^{-1}.

(3) Calculate A^{15}.

(4) Calculate $\lim_{n\to\infty} ||(AB)^n \boldsymbol{x}||$, where n is a natural number.

Q.2 Let A be an $m \times n$ $(m > n)$ real matrix. Let B and C be matrices defined as follows. Here, $^{\mathrm{T}}$ denotes the matrix transpose. We define an inner product $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ as follows, where $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ are l-dimensional vectors, a_k is the k-th element of $\boldsymbol{a}$, and b_k is the k-th element of $\boldsymbol{b}$.

$$B = A^{\mathrm{T}}A \qquad C = AA^{\mathrm{T}} \qquad \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \sum_{k=1}^{l} a_k b_k$$

Answer the following questions. Use the following properties of a real symmetric matrix, if needed.

- All eigenvalues of a real symmetric matrix are real.
- For any eigenvalue of a real symmetric matrix, we can choose an eigenvector to be a real vector.

(1) Prove that both matrices B and C are real symmetric matrices.

(2) Prove that all the eigenvalues of B are non-negative.

(3) A real symmetric matrix can be diagonalized using an orthogonal matrix. All column vectors of an orthogonal matrix with which B is diagonalized are eigenvectors of B. Among these eigenvectors, let $\boldsymbol{p}_i$ and $\boldsymbol{p}_j$ be eigenvectors corresponding to positive eigenvalues λ_i and λ_j, respectively, and let $\boldsymbol{q}_i$ and $\boldsymbol{q}_j$ be vectors given by $\boldsymbol{q}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A\boldsymbol{p}_i$ and $\boldsymbol{q}_j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} A\boldsymbol{p}_j$.

Prove that $\boldsymbol{q}_i$ and $\boldsymbol{q}_j$ are eigenvectors of C corresponding to eigenvalues λ_i and λ_j, respectively, and that $\langle \boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{q}_j \rangle = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases}$. Prove also that $\boldsymbol{p}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} A^{\mathrm{T}} \boldsymbol{q}_i$.

F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 1　以下の問いに答えよ。

(1) 以下の関数について、導関数を y のみを用いて表せ。また、その導関数の値域を示せ。

A) $y = f(x) = \frac{1}{1+\exp(-x)}$

B) $y = f(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}$

(2) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ 及び $0 \le x, y \le 1$ の条件の下、$f(x,y) = x^3 + 2y^3$ の極値を求めよ。

設問 2　地面に直立した半径 1[m] の円筒がある。ヤギの首に長さ π[m] の伸び縮みしないヒモが結び付けられている。このヒモのもう一端は円筒表面の一点（首と同じ高さ）に結び付けられている。

(1) 円筒の中心軸を原点とし、ヒモの結び付けられている円筒上の点を $(-1, 0)$ とする 2 次元座標系を地面上で考えたとき、$x \ge -1, y \ge 0$ において、ヤギがヒモをたるませずに立っているときの 2 次元座標を x 軸からの角度 θ を用いて表せ。

(2) このヤギがヒモをたるませずに円筒周りを一周したとき、その総移動距離を求めよ。

(3) このヤギが歩き回れる地面の面積を求めよ。

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.1 Answer the following questions.

(1) Express the derivative function for each of the following functions using only y and show the range of the derivative function.

A) $y = f(x) = \frac{1}{1+\exp(-x)}$

B) $y = f(x) = \frac{\exp(x)-\exp(-x)}{\exp(x)+\exp(-x)}$

(2) Compute the extrema of $f(x, y) = x^3 + 2y^3$ when $x^2 + y^2 - 1 = 0$ and $0 \leq x, y \leq 1$.

Q.2 A cylinder of $1\,[\mathrm{m}]$ radius is erected perpendicularly on the ground. A goat is on a leash of $\pi\,[\mathrm{m}]$ that neither stretches nor compresses. The other end of the leash is tied to a surface point of the cylinder at the same height.

(1) Consider a two-dimensional coordinate frame with its origin at the center axis of the cylinder and where the point of attachment of the leash on the cylinder is $(-1, 0)$. Using angle θ from the x axis, express the 2D coordinates of the goat when she is standing without any slack to the leash for $x \geq -1, y \geq 0$.

(2) Derive the total distance the goat would travel when going around the cylinder once without any slack to the leash.

(3) Derive the total area of the ground the goat can cover.

F1–1、F1–2、F2–1、F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 1　整数の集合 A の要素の小さい方から k 番目 ($k \geq 1$) の要素の値を返す関数 SelectKth(A,k) を考える。例えば、$A = \{5,1,7\}$ および $k = 2$ の場合、SelectKth(A,k) は 5 を出力する。今、$p :=$ PivotSelect(A) は A に含まれる要素のうち一つをランダムに返す関数とし、$(L,R) :=$ Partition(A,p) は集合 A を p 以下の値で構成される集合 L と p より大きい値で構成される集合 R に分割する関数とする。例えば、$A = \{5,1,7\}$ および $p = 5$ の場合、$(L,R) :=$ Partition(A,p) の L および R はそれぞれ、$L = \{5,1\}$、$R = \{7\}$ となる。また、Remove(A,p) は集合 A から要素 p を削除する関数とする。例えば、$A = \{5,1,7\}$ および $p = 7$ の場合、Remove(A,p) は A を $\{5,1\}$ にする。$|X|$ は集合 X の要素数とし、A のすべての要素は異なるとする。

Algorithm 1 SelectKth(A,k). Find the k-th smallest element in A.

```
function SelectKth(A, k):
p := PivotSelect(A)
(L, R) := Partition(A, p)

if [ (a) ] then
  return p
end if
if [ (b) ] then
  if |R| = 0 then
    Remove(L, p)
  end if
  return SelectKth(L, [(c)])
end if
if [ (d) ] then
  return SelectKth(R, [(e)])
end if
```

(1) Algorithm1 は SelectKth 関数の疑似コードである。Algorithm1 の (a)–(e) を埋めよ。

(2) $|A| = n$ の場合の Partition(A,p)、Remove(L,p)、PivotSelect(A) の要素の比較回数をそれぞれ $O(n)$、$O(n)$、および $O(1)$ とする。Algorithm1 の平均比較回数をオーダー表記で答えよ。

（次のページに続く）

F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。

設問 2 4つのリストを用いた外部ハッシュ法について以下の問いに答えよ。キーは $0, 1, 2$ のいずれかの整数が4つ並んだパターン $s_4s_3s_2s_1, s_i \in \{0, 1, 2\}$ で与えられる。また以下において、 mod は割り算の余りを出力する演算子を示す。

(1) 表1は、ハッシュ関数 $\left(\sum_{i=1}^{4} 3^{i-1} s_i\right) \mod 4$ を用いて、キー 0100, 1211 を順に挿入した後のデータ構造を模式的に表している。この状態に追加で 0010, 2101, 1222, 1111 を順に挿入した後のデータ構造を表1に倣って図示せよ。

(2) k 個の要素で構成されるリストに、新たに要素を1つ追加するのに要するコストを ck (c は正の実定数) とする。表2に示す確率分布に従って独立に生起する複数個のキーをハッシュ法を用いて順に挿入していくとき、挿入コストの期待値が最小となるキーとハッシュ値の対応付けをその理由とともに示せ。対応付けは表2における (a), (b), (c), (d) を埋める形で解答せよ。

(3) (2) で求めた対応付けを $(\sum_{i=1}^{4} a_i s_i + a_5 s_1 s_2 + a_6 s_3 s_4) \mod 4$ なるハッシュ関数で実現するときの $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ を導出せよ。

表1

インデックス	リスト
0	
1	0100 → 1211
2	
3	

表2

キー	生起確率	ハッシュ値
0100	0.10	(a)
0210	0.20	(b)
1010	0.15	0
1101	0.15	1
1111	0.25	(c)
2101	0.15	(d)

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.1 We consider a function SelectKth(A, k) which returns the k-th ($k \geq 1$) smallest element in a set A whose elements are integers. For example, in $A = \{5, 1, 7\}$ and $k = 2$, SelectKth(A, k) returns 5. Now, we define a function $p :=$ PivotSelect(A) which returns a random element of A, and we define a function $(L, R) :=$ Partition(A, p) that divides a set A into a set L consisting of elements less than or equal to p and a set R consisting of elements greater than p. For example, in $A = \{5, 1, 7\}$ with $p = 5$, L and R of $(L, R) :=$ Partition(A, p) are given as $L = \{5, 1\}$ and $R = \{7\}$, respectively. We also define a function Remove(A, p) that removes the element p in the set A. For example, in $A = \{5, 1, 7\}$ with $p = 7$, Remove(A, p) changes A to $\{5, 1\}$. Note that we denote $|X|$ as the number of elements in the set X, and assume all elements of the set A are different.

Algorithm 1 SelectKth(A, k). Find the k-th smallest element in A.

```
function SelectKth(A, k):
p := PivotSelect(A)
(L, R) := Partition(A, p)

if [ (a) ] then
  return p
end if
if [ (b) ] then
  if |R| = 0 then
    Remove(L, p)
  end if
  return SelectKth(L, [(c)])
end if
if [ (d) ] then
  return SelectKth(R, [(e)])
end if
```

(1) Algorithm1 is a pseudo code of the SelectKth function. Fill (a)–(e) in Algorithm 1.

(2) For $|A| = n$, we assume that the number of element comparisons of Partition(A, p), Remove(L, p), and PivotSelect(A) are $O(n)$, $O(n)$, and $O(1)$, respectively. Answer the expected number of comparisons in Algorithm 1 by big-O notation.

(continued on the next page)

Question is translated in English in the section below; this translation is given for reference only.

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

Q.2 Answer the following questions about a hashing with 4 linked lists based on a separated chaining method. A key is given as a sequence of 4 integer numbers $s_4s_3s_2s_1, s_i \in \{0,1,2\}$. mod indicates an operator that derives a remainder of division.

(1) Consider a hash function $\left(\sum_{i=1}^{4} 3^{i-1}s_i\right) \mod 4$. Table 1 shows the data structure after keys 0010 and 1211 are sequentially inserted to an empty state. Draw the data structure after 0010, 2101, 1222, and 1111 are additionally inserted in this order.

(2) Assume that it takes a cost ck for adding a new record to a list containing k records, where c is a positive constant. Consider sequentially inserting keys that independently occur following the probability distribution shown in Table 2. Show the correspondences between keys and hash values that minimize the expected cost taken for inserting a key, and explain its reasons. The correspondences must be answered by filling (a), (b), (c) and (d) in Table 2.

(3) Derive $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ in a hash function $(\sum_{i=1}^{4} a_is_i + a_5s_1s_2 + a_6s_3s_4) \mod 4$ that achieves the correspondences answered in the previous question.

Table 1

index	list
0	
1	0100 → 1211
2	
3	

Table 2

key	probability	hash value
0100	0.10	(a)
0210	0.20	(b)
1010	0.15	0
1101	0.15	1
1111	0.25	(c)
2101	0.15	(d)

設問2（Q.2）の小問(1)の英語版の本文中において、以下の誤植がありました。
（誤）0010 and 1211
（正）0100 and 1211
なお、日本語版には誤りはありませんでした。

The description of problem (1) of Q.2 in English contained the following typographical error.
(Error) 0010 and 1211
(Correct) 0100 and 1211
The corresponding problem description in Japanese did not have any errors.

<u>F1–1、F1–2、 F2–1、 F2–2 それぞれ別の解答用紙を用いて解答すること。</u>

ナップサック問題の入力は、非負整数の容量 c を持つナップサックと、n 個のアイテム $a_1, a_2, \ldots, a_n$ からなる。各アイテム a_i は正整数の重さ w_i $(\leq c)$ と正整数の価値 p_i を持つ。アイテムの集合 S の合計重さと合計価値は、それぞれ S に含まれるアイテムの重さの総和、価値の総和と定義する。ナップサックには、合計重さ c 以下のアイテム集合を詰め込むことができる。ナップサックに詰め込むことのできるアイテム集合のうち合計価値が最大となるものをその入力に対する最適解、最適解の合計価値をその入力に対する最適値と呼ぶ。

$n = 6$, $c = 10$ で、アイテムが以下の表で与えられる入力を I とする。

アイテム	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
重さ w_i	2	3	3	4	4	5
価値 p_i	3	4	5	6	7	8

設問 1 入力 I に対する最適値と、全ての最適解を答えよ。

設問 2 アイテムを単位重さ当たりの価値が大きい順に「ナップサックに入れることができれば入れ、できなければ捨てる」という逐次処理をし、最後にナップサックに入っているアイテム集合を出力するアルゴリズムを考える。ただし、単位重さ当たりの価値が同じアイテムが複数あれば、価値の高いものを先に処理する。入力 I にこのアルゴリズムを適用させた場合の出力を答えよ。

設問 3 $n \leq 4$、$c = 10$ で、設問 2 のアルゴリズムが出力するアイテム集合の合計価値が最適値の 5 倍以上悪く（小さく）なる入力例を 1 つ示せ。また、最適解とアルゴリズムの出力を示すことにより、その答えが設問の要件を満たしていることを説明せよ。

設問 4 $1 \leq i \leq n,\ 0 \leq j \leq c$ を満たす整数 i, j に対し、アイテムが $a_1, \ldots, a_i$ でナップサック容量が j である部分問題の最適値を $OPT(i, j)$ とする。上記の入力 I に対して $OPT(1, 1)$、$OPT(2, 4)$、$OPT(3, 5)$ の値を答えよ。

設問 5 設問 4 で定義した $OPT(i, j)$ を i や j の値が小さいものから順に計算していくアルゴリズムを考える。以下の問いに答えよ。なお本設問は、上記の具体的な入力 I に対してではなく一般の入力に対する問いであるので注意すること。

(1) $OPT(i, 0)$ の値を答えよ。

(2) $OPT(1, j)$ の値を答えよ。

(3) $i \geq 2,\ j \geq 1$ とし、$1 \leq a \leq i - 1,\ 0 \leq b \leq j$ および $a = i,\ 0 \leq b \leq j - 1$ を満たす全ての a, b について $OPT(a, b)$ が求まっているとする。このとき $OPT(i, j)$ を求める計算方法を答えよ。

Use one answer sheet for each of F1–1, F1–2, F2–1, and F2–2.

An input of the knapsack problem consists of a *knapsack* with a nonnegative integer c, called the *capacity*, and n *items* $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Each item a_i has a positive integer w_i ($\leq c$), called the *weight*, and a positive integer p_i, called the *profit*. The *total weight* and the *total profit* of a set of items S are defined as the sum of the weights and the sum of the profits, respectively, of all the items in S. A set of items whose total weight is at most c can be packed into the knapsack. A set of items with the maximum total profit that can be packed into the knapsack is called an *optimal solution* of the input, and the total profit of an optimal solution is called the *optimal value* of the input.

Let I be the input with $n = 6$ and $c = 10$, where items are given in the following table.

Item	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
Weight w_i	2	3	3	4	4	5
Profit p_i	3	4	5	6	7	8

Q.1 Show the optimal value and all the optimal solutions of the input I.

Q.2 Consider the following algorithm: sequentially process items in a non-increasing order of the profit per unit weight. When processing an item, put it into the knapsack if possible, and discard it otherwise. Finally, output the set of items in the knapsack. If there are two or more items with the same profit per unit weight, process the one with the largest profit first. Show the output when this algorithm is applied to the input I.

Q.3 Show an input with $n \leq 4$ and $c = 10$, where the total profit of the output of the algorithm defined in Q.2 is at least 5 times worse (smaller) than the optimal value. Also, explain why your answer meets the condition of this question by showing an optimal solution and the output of the algorithm.

Q.4 For integers i and j such that $1 \leq i \leq n$ and $0 \leq j \leq c$, let $OPT(i, j)$ be the optimal value of the restricted input where items are $a_1, \ldots, a_i$ and the capacity of the knapsack is j. Show $OPT(1, 1)$, $OPT(2, 4)$, and $OPT(3, 5)$ for the above input I.

Q.5 Consider an algorithm that computes $OPT(i, j)$ defined in Q.4 from those for smaller i and j. Answer the following questions. Note that these questions are not for the specific input I defined above but for general inputs.

(1) Show $OPT(i, 0)$.

(2) Show $OPT(1, j)$.

(3) Let $i \geq 2$ and $j \geq 1$, and assume that $OPT(a, b)$ is already computed for all a and b such that $1 \leq a \leq i - 1$, $0 \leq b \leq j$ and $a = i$, $0 \leq b \leq j - 1$. Show how to compute $OPT(i, j)$.